ZESTAW WYBRANYCH WZORÓW MATEMATYCZNYCH

Ciągi

Ciąg arytmetyczny

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{r \in \mathbf{R}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}_+} a_{n+1} = a_n + r.$$

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}$$

Własności ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \text{ dla } 0 < k < n \text{ i } n \geqslant 2$$

Monotoniczność:

ciąg jest rosnący, gdy $r > 0$;

ciąg jest malejący, gdy $r < 0$;

ciąg jest stały, gdy $r = 0$.

Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{q \in \mathbf{R}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}_+} a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Wzór na n–ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ dla } n \geqslant 2$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = \begin{cases} n \cdot a, \text{ gdy } q = 1 \\ \dfrac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}, \text{ gdy } q \neq 1 \end{cases}$$

Własności ciągu geometrycznego

$$|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} = \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}}, \text{ dla } 0 < k < n \text{ i } n \geqslant 2$$

Monotoniczność:

ciąg jest rosnący, gdy ($q > 1$ i $a_1 > 0$) lub ($q \in (0;1)$ i $a_1 < 0$)

ciąg jest malejący, gdy ($q > 1$ i $a_1 < 0$) lub ($q \in (0;1)$ i $a_1 > 0$)

ciąg jest stały, gdy $q = 1$ lub $a_1 = 0$

Trygonometria

Funkcje trygonometryczne

Funkcja zmiennej rzeczywistej	D_f	$\mathbb{C}_f$	Okres podstawowy
$f(x) = \sin x$	$\mathbf{R}$	$\langle -1; 1 \rangle$	2π
$f(x) = \cos x$	$\mathbf{R}$	$\langle -1; 1 \rangle$	2π
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ x: \bigwedge_{k \in C} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$\mathbf{R}$	π
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ x: \bigvee_{k \in C} x = k \cdot \pi \right\}$	$\mathbf{R}$	π

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna)

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$, gdy $\cos \alpha \neq 0$ i $\sin \alpha \neq 0$

$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, gdy $\sin \alpha \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, gdy $\sin \alpha \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$

Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

Tabela znaków funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	–	+	–

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych miar kąta

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istn.
$\operatorname{ctg} x$	nie istn.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Geometria analityczna

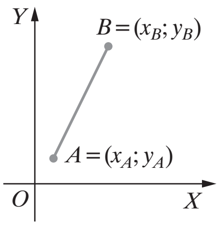
Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$



Prosta

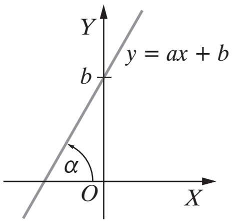
Równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$,

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi OY, to ma ona równanie kierunkowe: $y = ax + b$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg}\alpha.$$



Prosta przechodząca przez dwa dane punkty $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$ jest wyrażona równaniem: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$

Prosta i punkt

Odległość punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ dana jest wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Para prostych

Dwie proste, o równaniach kierunkowych $y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$ spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$,

– są prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$.

Jeżeli proste dane są równaniami w postaci ogólnej:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $\quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ to odpowiednio:

– są równoległe, gdy $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$,

– są prostopadłe, gdy $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Równanie okręgu

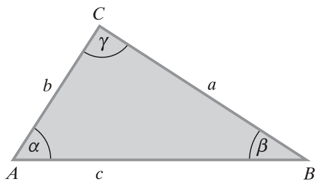
Równanie okręgu o środku w punkcie $(a; b)$ i promieniu r:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ lub $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$,

gdzie $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.

Twierdzenie sinusów i cosinusów

Dany jest trójkąt:



a) **Twierdzenie sinusów (Snelliusa):**

Stosunek długości boków do sinusów kątów przeciwległych jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie:

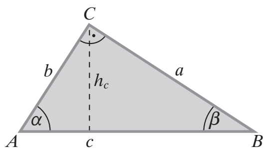
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

b) **Twierdzenie cosinusów (Carnota):**

Kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

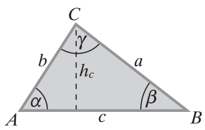
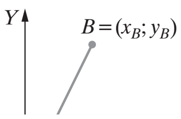
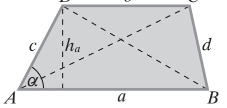
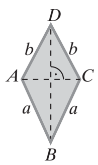
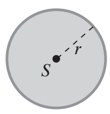
Twierdzenie Pitagorasa



Suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pola i obwody wybranych figur płaskich

Figury geometryczne	Pole	Obwód
Trójkąt: 	$P = \frac{c \cdot h_c}{2}$ $P = \frac{1}{2} b \cdot c \sin\alpha$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $P = rp$ (r – promień okręgu wpisanego w trójkąt) $P = \frac{abc}{4R}$ (R – promień okręgu opisanego na trójkącie)	$L = a + b + c$
Równoległobok: 	$P = a \cdot h_a$ $P = ab\sin\alpha$ $P = \frac{\lvert AC\rvert \cdot \lvert BD\rvert}{2} \sin\varphi$	$L = 2a + 2b$
Trapez: 	$P = \frac{a+b}{2} \cdot h_a$ $P = \frac{a+b}{2} \cdot c\sin\alpha$	$L = a + b + c + d$
Deltoid: 	$P = \frac{\lvert AC\rvert \cdot \lvert BD\rvert}{2}$	$L = 2a + 2b$
Koło: 	$P = \pi r^2$	$L = 2\pi r$ (długość okręgu)

Stereometria

Oznaczenia

P – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole powierzchni podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

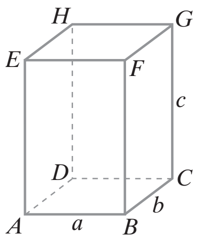
V – objętość

Prostopadłościan

$P = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc,$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu.

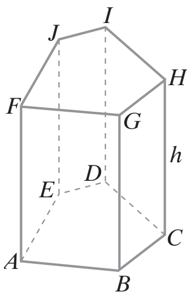


Graniastosłup prosty

$P_b = 2p \cdot h$

$V = P_p \cdot h,$

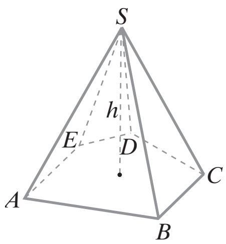
gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa.



Ostrosłup

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h,$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



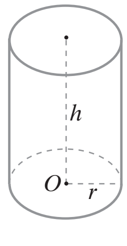
Walec

$P_b = 2\pi rh$

$P = 2\pi r(r + h)$

$V = \pi r^2 h,$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością walca.



Stożek

$P_b = \pi rl$

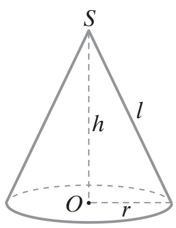
$P = \pi r(r + l)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$

gdzie r jest promieniem podstawy,

h – wysokością,

l – długością tworzącej stożka.

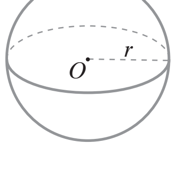


Kula

$P = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3} \pi r^3,$

gdzie r jest promieniem kuli.



Rachunek algebraiczny

Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

W szczególności: $|x| \geqslant 0, |-x| = |x|$.

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $|x - y| \leqslant |x| + |y|$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}.$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy liczbę $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$,

dla $a \geqslant 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,

dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $\quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$, $\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$, $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Silnia

Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Symbol Newtona

Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leqslant k \leqslant n$ definiujemy symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Wzory skróconego mnożenia

Z dwumianu Newtona dla $n = 2$ oraz $n = 3$ otrzymujemy dla dowolnych liczb a, b:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $\quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $\quad a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$,

$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Funkcje

Funkcja i jej własności

Funkcja rosnąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Funkcja malejąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Funkcja nierosnąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Funkcja niemalejąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

Funkcja ograniczona: $\bigvee_{M \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{x \in D_f} |f(x)| \leqslant M$

Funkcja parzysta: $\bigwedge_{x \in D_f} \left[-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)\right]$

Funkcja nieparzysta: $\bigwedge_{x \in D_f} \left[-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)\right]$

Funkcja kwadratowa

a) Funkcja kwadratowa (inaczej: trójmian kwadratowy) jest to funkcja postaci $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \boldsymbol{R}$.

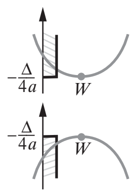
Uwaga: Gdyby $a = 0$, to funkcja byłaby liniowa: $y = bx + c$.

b) Wyróżnik trójmianu kwadratowego to liczba $\Delta = b^2 - 4ac$.

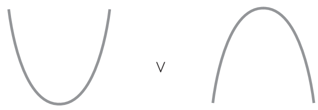
c) Dziedzina i zbiór wartości funkcji kwadratowej:

$D_f = \boldsymbol{R}$

$$Y_W = \begin{cases} \left\langle -\frac{\Delta}{4a}; +\infty \right) & \text{dla } a > 0 \\ \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a} \right\rangle & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$



d) Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola:



dla $a > 0$ (ramiona ku górze) ∨ dla $a < 0$ (ramiona w dół)

	Istnienie miejsc zerowych	Liczba miejsc zerowych
$\Delta > 0$	Istnieją.	Dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta = 0$		Jedno miejsce zerowe $x_1 = x_2 \overset{ozn.}{=} x_0$, $x_0 = -\frac{b}{2a} (= p)$
$\Delta < 0$	Nie istnieją.	Żadnych miejsc zerowych

Wzory Viéte'a

Założenie: $\Delta \geqslant 0$ (istnieją miejsca zerowe)
Wówczas:

suma: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, iloczyn: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Kombinatoryka

Permutacje

Liczba sposobów, w jaki $n \geqslant 1$ elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg, składający się z k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

Kombinacje

Liczba sposobów, w jaki spośród n elementów można wybrać k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

Rachunek prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli zajście każdego zdarzenia elementarnego jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ liczbę elementów zbioru Ω.

Własności prawdopodobieństwa

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$, Ω – zdarzenie pewne

$P(\varnothing) = 0$, $\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A) \leqslant P(B)$, gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$, zatem $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są niezależne, gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami, przy czym $P(B) > 0$.
Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A \mid B)$ zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, nazywamy liczbę:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$